

Digitaal toetsen van wiskunde in het HO

■ Dr. D.T. Tempelaar

Dr. D.T. Tempelaar is Universitair Hoofddocent QE/Econometrics, Quantitative Economics, School of Business and Economics, Universiteit Maastricht
E-mail: d.tempelaar@maastrichtuniversity.nl

In deze bijdrage wordt de rol van digitale toetsing in het wiskunde onderwijs besproken. Die rol is veelzijdig, omdat het alle fasen van toetsing van, voor en als leren omvat. Vraagstukken die eerst als oefenmateriaal dienen, komen later terug in een formatieve rol, ter signalering van wat al wel of niet goed begrepen wordt. En hebben als laatste een klassiek summatieve functie.

Het vroege begin van digitale wiskunde toetsen

Digitale toetsing van wiskunde, en ook van rekenen, heeft een rijke historie. Een historie die eigenlijk samenvalt met het allereerste begin van het gebruik van computers in het onderwijs. Als één van de vroegste onderwijskundige toepassingen verschenen toets- en oefenprogramma's voor eenvoudige rekenkundige bewerkingen. Snel gevolgd door digitale leermiddelen die aan dat toetsen en oefenen twee belangrijke ondersteunende functies toevoegden. Dat betrof het geven van gedetailleerde leerfeedback, vooral bij het fout beantwoorden van een toetsvraag, en de functie van plaatsing (placement): het uit behaalde toetsresultaten afleiden waar de lerende als volgende leerstap aan toe is. Dat stadium was ruim tien jaar terug al bereikt; zo beschreven we in een eerdere bijdrage aan dit tijdschrift (Tempelaar, Rienties & Giesbers, 2008) het gebruik van de op digitale toetsing gebaseerde leeromgeving ALEKS. Deze applicatie bepaalt voor iedere student de 'zone van naaste ontwikkeling' (Valcke, 2010) uit toets- en oefendata op basis van technieken uit de artificiële intelligentie. Die toepassing is nog steeds 'state of the art', wat aangeeft

dat het afgelopen decennium de vooruitgang minder in functionaliteit, maar meer in schaalverbreding heeft gelegen. Waar tien jaar terug digitaal wiskunde onderwijs iets voor pioniers was, zie je het nu terug in nagenoeg ieder op de wiskunde gericht programma.

Wat maakt digitaal wiskunde toetsen anders?

Wat verklaart het vroege succes van digitale toetsing in de wiskunde, en wat maakt deze toetsing anders dan digitale toetsing in andere disciplines? Allereerst: in de meeste grootschalige toepassingen van digitale toetsing wordt gebruik gemaakt van gesloten vraagformaten. Het meerkeuze formaat is daarin leidend, maar ook formaten als de juist/onjuist vraag, de meer-antwoord vraag, de sorteervraag en de combinatie- of matching-vraag komen veel voor in digitale toetsen. In tegenstelling tot digitale wiskunde toetsen, die veel vaker uit open vraagformaten zijn samengesteld. Het numerieke vraagformaat is daarin het bekendste voorbeeld, vooral uit de talrijke applicaties voor het toetsen en oefenen van rekenen: de vraag is een sommetje, het antwoord een getal dat door de applicatie op juistheid kan worden beoordeeld. In feite niet

meer dan een door de computer te beoordelen kort-antwoord vraag. De echte wiskunde toets-applicatie gaat een stap verder: het kan ook algebraïsche expressies evalueren.

Algebraïsche expressies en hun evaluatie

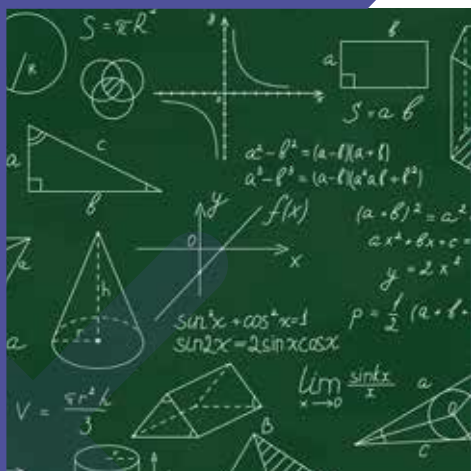
Een algebraïsche expressie is een 'formule' waarin zowel getallen, symbolen die variabelen representeren, als wiskundige bewerkingen in voorkomen. Figuur 1 geeft daar een mooi voorbeeld van; het is een vraag uit een digitale tussentoets van eerstejaars studenten bedrijfskunde en economie. Het goede antwoord bestaat uit twee onderdelen, waarvan het eerste de expressie $4x3y5$ is. In deze expressie komen twee vermenigvuldigen voor, en in een vermenigvuldiging maakt

het niet uit in welke volgorde de argumenten worden geplaatst. Dus als de student het antwoord $4y5x3$ geeft, is dat eveneens correct. In dit voorbeeld kan nog een opsomming gegeven worden van alle expressies die als goed gerekend moeten worden, maar in andere vragen is dat aantal onbegrensd. Bijvoorbeeld: geef de vergelijking van een lijn die evenwijdig loopt aan de lijn met vergelijking $y=x$. Om te beoordelen of het antwoord van de student correct is, en zo niet, welke fout er is gemaakt en welke feedback daarbij past, moet de applicatie de expressie kunnen evalueren. Met behulp van computer-algebra-software moet beoordeeld worden of het antwoord van de student wiskundig equivalent is aan de expressie die het goede antwoord voorstelt.

Geparametriseerde toetsvragen en formule-editors

Zo gauw een toetsapplicatie in staat is expressies te beoordelen, is een volgende belangrijke stap binnen handbereik: het parametriseren van vragen. Figuur 1 geeft daar al meteen een illustratie van: alle studenten hebben deze toetsvraag beantwoord, en alle studenten hebben dat gedaan voor een functie z met argumenten x en y , maar tegelijkertijd hebben alle studenten een verschillend functievoorschrift gezien. Dat kan door de vraag te parametriseren: de machten van de twee argumenten x en y , hier vier en vijf, zijn toevalsgetallen, en zullen dus telkens andere waarden aannemen.

Iedere beantwoording van deze toetsvraag kent dus zijn eigen goede antwoord, en de beoordeling van de correctheid van het gegeven antwoord is cruciaal afhankelijk van de beschikbaarheid van computer-algebra-software. Figuur 2 geeft een verder voorbeeld van zo'n geparametriseerde vraag, dit keer uit ons wiskunde fundatie programma (schakeljaar ter voorbereiding van de bacheloropleiding). In dit geval in de vorm van een meervoudige combinatievraag. Waar de algebraïsche expressies in deze twee voorbeelden nog een



**Digitale leeromgeving
gebaseerd op beheersingsle-
ren ondersteunt toetsing van,
voor en als leren**

☰

1-10

Quiz3Week7

Exercise

Find all first order partial derivatives for $z(x, y) = x^4 \cdot y^5$.

Answer

$z_x = 4 \cdot y^5 \cdot x^3$

✓ Correct

$z_y = 5 \cdot x^4 \cdot y^4$

✓ Correct

Solution

$z_x = 4 \cdot x^3 \cdot y^5$

$z_y = 5 \cdot x^4 \cdot y^4$

Figuur 1.

Question

22

FP1819MidtermHumanities

FP1819MidtermHumanities

This table contains expressions. Drag the expressions in which the brackets show the correct order of operations to the middle column. Drag the simplified expression to the third column.

$(3 \cdot x - 7 \cdot x) + 3 \cdot x$

$\frac{16}{3} \cdot x$

$(3 \cdot x : 7) \cdot 3 \cdot x$

$-18 \cdot x^2$

$10 \cdot x^5$

$\frac{9}{7} \cdot x^2$

C Reset

$(3 \cdot x^{3+2}) + (7 \cdot x^{2+3})$

$3 \cdot x^2 - (7 \cdot x \cdot 3 \cdot x)$

$-1 \cdot x$

$3 \cdot x + (7 \cdot x : 3)$

Expression	Expression with the brackets at the right position	Simplified expression
$3 \cdot x - 7 \cdot x + 3 \cdot x$		
$3 \cdot x^2 - 7 \cdot x \cdot 3 \cdot x$		
$3 \cdot x + 7 \cdot x : 3$		
$3 \cdot x : 7 \cdot 3 \cdot x$		
$3 \cdot x^{3+2} + 7 \cdot x^{2+3}$		

Figuur 2.

eenvoudige structuur hebben, en daarmee in een gewone tekstverwerker ingevoerd kunnen worden, zullen deze expressies in veel gevallen gebruik maken van speciale tekens, zoals sommatie of integraal symbolen. Dus het derde onderscheidende kenmerk van digitale toetsing van wiskunde is de aanwezigheid van een formule editor. En dan niet een losstaande editor, vergelijkbaar met de formule editor in het veelgebruikte Word programma, maar een formule editor die is geïntegreerd met de computer-algebra-software: iedere algebraïsche expressie opgesteld met de formule editor moet ook geëvalueerd kunnen worden op de uitkomst.

Van toetsing naar toetsgestuurd leren

Toetssoftware met alle hierboven beschreven kenmerken is dus niet van recente datum; veel wiskunde en technische opleidingen in het Nederlandse hoger onderwijs maakten bijvoorbeeld gebruik van de Maple T.A. software. Maar dat betrof meestal losstaande toetsing. Wat wel van meer recente datum is, is de komst van digitale toetsing waarin de toetssoftware wordt geïntegreerd met digitale leeromgevingen. In Nederland heeft SURF, de samenwerking van hoger onderwijs instellingen op het gebied van kennistechnologie, een belangrijke rol gespeeld als aanjager van deze ontwikkeling.

SURF programma's ter stimulering van digitale toetsing

Het digitaal toetsen in de wiskunde in Nederland heeft sterk geprofiteerd van twee opeenvolgende SURF programma's. Het eerste was het Nationaal Actie Plan e-learning dat van 2006-2010 liep. Als onderdeel van dat programma is door een consortium van dertien hoger onderwijs instellingen een gezamenlijke en open itembank van wiskunde vraagstukken ontwikkeld. Beoogde doelgroep waren

vooral aankomende studenten in beta- en gamma-opleidingen met tekortschietende wiskundige vaardigheden. Als onderdeel van een vervolgprogramma van SURF, Toetsing en Toetsgestuurd Leren, zijn deze toetsmaterialen doorontwikkeld naar ondersteuning van doorstroom zowel als instroom. Dat Toetsing en Toetsgestuurd Leren programma liep van 2011 tot 2014, en is beschreven in dit tijdschrift: Joosten-ten Brinke (2013). Platforms als Sowiso, hieronder beschreven, vinden hun oorsprong in deze SURF programma's.

Beheersingsleren

De door SURF gebruikte term toetsgestuurd leren is geen algemeen gangbare, mogelijk door de negatieve connotatie van leren dat in belangrijke mate door toetsing gestuurd wordt. In de Angelsaksische wereld is de term 'mastery learning', beheersingsleren (Valcke, 2010) veel gangbaarder. Het beheersingsleren benadrukt dat ieder leerdoel kan worden opgesplitst in een reeks van elkaar opvolgende subleerdoelen, en dat voor het goed doorlopen van deze sequentie van subleerdoelen het belangrijk is pas de volgende stap in te zetten, als de vorige geheel voltooid is. Dat impliceert de cruciale rol van formatieve toetsing: die moeten groen licht geven voor het starten van een volgende leerstap of, indien nog geen volledige beheersing is bereikt, specifieke leerfeedback verschaffen om wel tot die beheersing te komen. Beheersingsleren is bij uitstek een individuele en adaptieve instructievorm: de tijd die een lerende nodig heeft voor ieder van de opeenvolgende leerstappen zal variëren van student tot student, en het voortijdig overstappen naar een volgende leerstap, vaak kenmerkend voor klassikaal onderwijs, ondermijnt de kennisvorming. Er zijn weinig disciplines met een zo sterke hiërarchische structuur als de wiskunde, waar het concept aftrekken nietszeggend is zonder begrip van optellen, of waar derdegraads functies onbegrepen zullen

blijven zonder beheersing van tweedegraads functies. Hetgeen goed verklaart waarom beheersingsleren op basis van toetsvraagstukken vooral in de wiskunde zo'n dankbare toepassing heeft gekregen.

Nederlandse platforms

Uit de aanjaagfunctie van SURF is een aantal digitale platforms voortgekomen die in Nederland zijn ontwikkeld, en die alle gebruikt kunnen worden als een 'lege' toetsapplicatie waar de gebruiker zelf inhoud aan geeft, maar die ook met meegeleverde 'content' kunnen worden ingezet. Drie van die ontwikkelingen zijn Sowiso, Grasple, en Numworx. Het platform Sowiso (<https://sowiso.nl/>) is een digitale leeromgeving gebaseerd op het principe van beheersingsleren in basiswiskunde, analyse, algebra en meer geavanceerde wiskundige onderwerpen als differentiaalvergelijkingen, en recentelijk ook statistiek. GraspLe (<https://www.graspLe.com/>) heeft in zekere zin een omgekeerde ontwikkeling doorgemaakt: het begon als platform ter ondersteuning van het statistiekonderwijs (onder de naam 'I hate statistics'), maar ondersteunt tegenwoordig zowel de disciplines wiskunde als statistiek. Naamswijziging is ook het kenmerk van Numworx (<https://www.numworx.nl/>), dat tot voor kort DWO heette, en uit de kokers van het Utrechtse Freudenthal Instituut komt. Dit platform richt zich specifiek op wiskunde, zowel voor vo als ho.

De Maastrichtse situatie

De Universiteit Maastricht (UM) gebruikt het digitale platform Sowiso voor drie verschillende toepassingen: het ondersteunen van studenten in het verwerven van wiskundige vaardigheden voor, in en na de poort. 'Voor de poort' betreft vrijwillige, online 'bijspijker'cursussen. De UM kent relatief veel internationale studenten die wiskundeonderwijs hebben genoten dat qua diploma wel gelijk gesteld wordt aan het Nederlandse VWO WiA, of WiB, maar dat qua inhoud nogal verschilt. Om deze studenten niet op achterstand te zetten bij de

start van hun studie worden de aankomende studenten in de gelegenheid gesteld om vooraf hun wiskundekennis op 'Nederlands peil' te brengen. Voor sommige studenten heeft dat overigens een verplichtend aspect: wanneer hun vooropleiding op het gebied van wiskunde te licht is en ze formeel wiskunde-deficiënt zijn, zullen ze de online cursus moeten afsluiten met een 'proctored' examen. Die proctoring vindt eveneens in Sowiso plaats, eveneens op afstand, maar in een situatie waar camera's erop toezien dat er geen fraude in het spel kan zijn. In een enkel geval zijn de deficiënties breder dan alleen de wiskunde, maar betreffen bijvoorbeeld ook taalbeheersing. Die studenten zullen aan het fundatie-programma deelnemen, een voltijds schakeljaar voorafgaand aan de bachelor opleiding waarin een 'blended' wiskunde cursus is opgenomen: de digitale leeromgeving Sowiso in combinatie met tutorgroepen volgens het Maastrichtse probleemgestuurde leren. Een dergelijke combinatie van instructievormen kenmerkt ook het onderwijs 'in de poort': korte maar intensieve cursussen een paar weken voor de aanvang van het studiejaar. Wat aantallen studenten betreft vallen al deze cursussen echter in het niet bij de rol van Sowiso in het reguliere programma, na de poort.

Toetsing van, voor en als leren

In recente verhandelingen over de rol van toetsing in het leren wordt de tegenstelling van summatieve versus formatieve toetsing vaak verrijkt met een driedeling: toetsing van, voor en als leren (assessment of, for & as learning). In die driedeling is het toetsen als leren de nieuwe dimensie: toetsing van leren valt samen met summatieve toetsing, terwijl formatieve toetsing primair het toetsen voor leren betreft. Toetsing als leren (zie bijvoorbeeld Dochy, Dochy & Janssens, 2018) betreft dan het gebruik van toetsvraagstukken en problemen als drijvende factor in het leerproces zelf. Er bestaat enige verscheidenheid aan interpretaties over wat wel of niet onder toetsing als onderwijs wordt verstaan.

Een beperkte interpretatie is dat toetsing als onderwijs primair over het verwerven van metacognitieve vaardigheden gaat: de studenten reflecteren op de wijze waarop ze een probleem al dan niet hebben opgelost, en verwerven zo metacognitieve vaardigheden die ze in het oplossen van andere problemen kunnen gebruiken. Een bredere interpretatie van toetsing als leren omvat al het gebruik van problemen als startpunt van het leerproces. Probleem- en project-gestuurd onderwijs zijn bij die interpretatie mogelijke vormen van toetsing als leren, net zoals de op beheersingsleren gebaseerde leeromgevingen Sowiso, Grasple en Numworx. Die bredere interpretatie volgend, is in Figuur 3 te zien op welke manieren Sowiso dat leerproces ondersteunt met feedback: welke 'scaffolds' ter beschik-

king worden gesteld. Ze staan als knoppen afgebeeld boven de formule-editor: Theorie, Oplossing, Tip. De namen verduidelijken veel: Theorie geeft een tekstboek uitleg over het onderwerp, Tip geeft een aanwijzing hoe de eerstvolgende oplosstap van het probleem kan worden aangepakt, Oplossing geeft een integrale oplossing van het probleem voor de student die voorbeeld-gestuurd leren verkiest.

Implementatie van drie niveaus van toetsing In hun eerste cursus wiskunde komen UM studenten bedrijfskunde en economie al deze drie niveaus van toetsing tegen. Het begint met een diagnostische instaptoets op de eerste dag, die samen met drie tweewekelijkse quizen de 'toetsing voor het leren' vorm geeft. 'Toetsing van het leren' is een schrifte-

Minimum, maximum en zadelpunt (opgave id: 6560)

Bekijk de functie

$$f(x, y) = y^2 - 4 \cdot y + x^2 - 4 \cdot x + 11$$

Deze kan geschreven worden in de vorm

$$f(x, y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + c$$

voor goed gekozen getallen x_1 , y_1 en c .

Bepaal het minimum punt van de functie.

$[x, y] =$

standaard functie logica vector abc

7	8	9	+	a^b	>	log	sin	$\prod$	$\sum$	$\int$	$\wedge$	(	)	$\sqrt[n]{}$
4	5	6	-	$\frac{\Box}{\Box}$	<	e	cos	lim	∞	$\int$	$\vee$	x'	y'	$\times$
1	2	3	$\div$	$\sqrt{}$	$\geq$		tan	ln	,	$\frac{d}{dx}$	def	$\uparrow$		$\circ$
.	0	=	$\times$	$\sqrt[n]{}$	$\leq$	!	π	i	a_n	{...}	geen	$\leftarrow$	$\downarrow$	$\rightarrow$

Figuur 3.

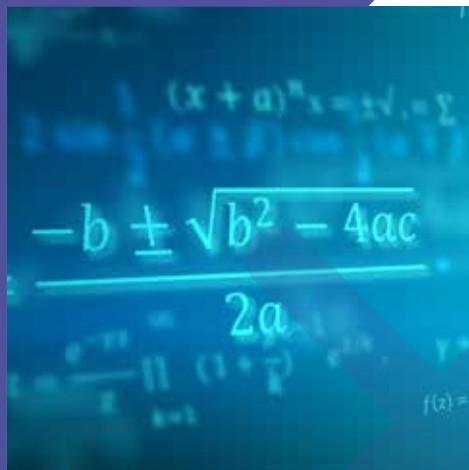
lijke eindtoets: als enige toetsvorm nog niet digitaal, wegens het ontbreken van een digitale toetszaal met meer dan duizend stoelen. 'Toetsing als leren' vindt continu plaats als studenten in de leeromgeving oefenen, met als uitkomst de bereikte beheersingsgraad in het onderwerp van de week. Studenten zowel als tutores gebruiken vervolgens die beheersingsgegevens om de tutorgroepbijeenkomsten zo effectief mogelijk in te richten.

Conclusie

Steeds meer wiskundeonderwijs vindt digitaal plaats. Daarin speelt beheersingsleren een cruciale rol: de leerstof wordt opgedeeld in een opeenvolging van leerstappen, en toetsing bepaalt wanneer de student voldoende beheersing heeft bereikt om de volgende stap te zetten. Toetsing van, voor en als leren worden zo gecombineerd in één leerproces. ■

Referenties

- Dochy, F., Dochy, W., Janssens, M. (2018). Assessment as Learning: de volgende stap in de toetsrevolutie. In D. Sluijsmans & M. Segers (red.), Toetsrevolutie, Naar een feedbackcultuur in het hoger onderwijs. Culemborg: Phronese.
- Joosten-ten Brinke, D. (2013). Toetsing en toetsgestuurd leren, het verlagen van uitval of werkdruk door digitaal toetsen. *Examens*, Mei 2013, 14-19.
- Tempelaar, D. T., Rienties, B., Van Wesel, M. (2008). Toetsend leren voor flexibel remediatie-onderwijs. *Examens*, Februari 2008, 28-32.
- Valcke, M. (2010). Onderwijskunde als ontwerpwetenschap, een inleiding voor ontwikkelaars van instructie en voor toekomstige leerkrachten. Gent: Academia Press.



De drie bestanddelen van digitale wiskunde toetsen: evaluatie van algebraïsche expressies, formule editor, geparametriseerde vragen